2023 CAPS-Match P4

Doubt Yourself

André Pinheiro

Novembro de 2023

Seja p, q e r números reais positivos tais que a equação

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor = n$$

é satisfeita para infinitos inteiros positivos n.
Prove que p, q, r são racionais.

Solução:

Vamos tentar estabelecer uma relação com o que está dentro da função floor

Solução:

Vamos tentar estabelecer uma relação com o que está dentro da função floor, dado que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

Solução:

Vamos tentar estabelecer uma relação com o que está dentro da função floor, dado que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

então temos que

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor \leq np + nq + nr < (\lfloor np \rfloor + 1) + (\lfloor nq \rfloor + 1) + (\lfloor nr \rfloor + 1)$$

Solução:

Vamos tentar estabelecer uma relação com o que está dentro da função floor, dado que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

então temos que

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor \leq np + nq + nr < (\lfloor np \rfloor + 1) + (\lfloor nq \rfloor + 1) + (\lfloor nr \rfloor + 1)$$

$$\Rightarrow n \leq np + nq + nr < n + 3 \Rightarrow 1 \leq p + q + r < 1 + \frac{3}{n}$$

Solução

Por hipótese, existem infinitos valores n positivos que satisfazem a equação, ou seja, podemos escolher n o quão grande nós queremos.

Solução

Por hipótese, existem infinitos valores n positivos que satisfazem a equação, ou seja, podemos escolher n o quão grande nós queremos. Sendo assim, podemos concluir que

$$1 \leq p + q + r < 1 + \frac{3}{n} \Rightarrow p + q + r = 1$$

Solução

Por hipótese, existem infinitos valores n positivos que satisfazem a equação, ou seja, podemos escolher n o quão grande nós queremos. Sendo assim, podemos concluir que

$$1 \leq p + q + r < 1 + \frac{3}{n} \Rightarrow p + q + r = 1$$

Disto resulta que

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor = np + nq + nr$$

Solução

Sem perda de generalidade, suponha que p é irracional.

Solução

Sem perda de generalidade, suponha que p é irracional. Ora, como o produto de um número inteiro com um número irracional é sempre irracional

Solução

Sem perda de generalidade, suponha que p é irracional. Ora, como o produto de um número inteiro com um número irracional é sempre irracional, então np nunca vai ser inteiro e portanto

$$\lfloor np \rfloor < np$$

pelo que $\lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Solução

Sem perda de generalidade, suponha que p é irracional. Ora, como o produto de um número inteiro com um número irracional é sempre irracional, então np nunca vai ser inteiro e portanto

$$\lfloor np \rfloor < np$$

pelo que $\lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$, então resulta que

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor < np + nq + nr,$$

que é uma contradição.

Sem perda de generalidade, suponha que p é irracional. Ora, como o produto de um número inteiro com um número irracional é sempre irracional, então np nunca vai ser inteiro e portanto

$$\lfloor np \rfloor < np$$

pelo que $\lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^+$, então resulta que

$$\lfloor np \rfloor + \lfloor nq \rfloor + \lfloor nr \rfloor < np + nq + nr,$$

que é uma contradição.

Logo, p, q, r são racionais. ■